Mates II (Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales)

1. Definiciones:

- Explica qué es una **matriz** y un **determinante**. (0.75 puntos)
- Enunciar el **teorema de Rouché–Frobenius**. (0.75 puntos)

2. Sean C_1,C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det(M) = 4. Calcula, enunciando las propiedades de los determinantes que utilices, el determinantes de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son respectivamente, $-C_2$, $2C_1-C_3$, C_2+C_3 (1.5 puntos)

3. Comprobar que si A y B son matrices invertibles, el producto A · B también es invertible y que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (1.5 puntos)

4. Discute y resuelve en función del parámetro b:

$$\begin{cases} (b^2+1)x + (b^2+1)y + (b^2+1)z = 0 \\ (b+1)x + (b^2-1)y + (b+1)z = 0 \\ 2x + by + 2z = 0 \end{cases}$$ (2 puntos)

5. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^n (1 punto)

6. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula sin desarrollar, el siguiente determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (1 punto)

7. Determina la matriz X en la siguiente ecuación matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A + B \cdot C)$, siendo: (1.5 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$