Examen Mates II (3º Evaluación) – Álgebra, Geometría y Análisis

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{array}\right\}$

- Discutirlo según los valores del parámetro a (0,75 puntos)
- Resuélvelo para a = 0 (0.75 puntos)
- Interprétalo geométricamente para a = 0 (0.5 puntos)

2. Sean el punto P = (3, -2, 6), la recta $r = \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi\colon x - 2y + 3z - 7 = 0$.

- Halla la distancia del punto P al plano π (0.75 puntos)
- Halla el ángulo que forman la recta r y el plano π (0.75 puntos)

3. Enuncia el teorema de Rolle. Si c > 2, calcula los valores de a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ x < 2 \\ x + 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,c]. (1.5 puntos)

4. Calcular:

- a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{e^x}{1-x} - \frac{x}{\ln x} \right)$ (1 punto)
- b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x+2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (1 punto)

5. Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Weiertrass (1 punto)

6. Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & si\ x \leq 1 \\ \frac{2\ln x + 2}{x^2} & si\ x > 1 \end{cases}$ sea derivable en x = 1.

Para los valores a = -4 y b = 6 determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). (2 puntos)